

# Landskeppni í eðlisfræði 2015

## Úrslitakeppni

21. mars kl. 09:00-12:00

Leyfileg hjálpargögn: Reiknivél sem geymir ekki texta.

Keppnin samanstendur af 5 dæmum sem eru öll í nokkrum liðum. Athugaðu hvort þú hafir fengið öll dæmin.

Öll dæmin 5 vega jafnt og ekki verður dregið frá fyrir röng svör.

Skrifaðu lausnir þínar snyrtilega á lausnablöð sem þú færð afhent og merktu þau vel.

Tekið verður tillit til útreikninga við yfirferð á dæmum.

Góður frágangur hefur jákvæð áhrif!

## Tafla yfir þekkta fasta

Nafn	Tákn	Gildi
Hraði ljóss í tómarúmi	$c$	$3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
Þyngdarhröðun við yfirborð jarðarinnar	$g$	$9,82 \text{ m/s}^2$
Massi rafeindar	$m_e$	$9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Rafsvörunarstuðull tómarúms	$\epsilon_0$	$8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ s}^2 / (\text{m}^3 \text{ kg})$
Frumhleðslan	$e$	$1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Þyngdarfastinn	$G$	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 / (\text{kg s}^2)$
Radíus sólarinnar	$R_{\odot}$	$6,98 \cdot 10^8 \text{ m}$
Massi sólarinnar	$M_{\odot}$	$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Radíus jarðarinnar	$R_{\oplus}$	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$
Massi jarðarinnar	$M_{\oplus}$	$5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Stjarnfræðieining	1 AU	$1,50 \cdot 10^{11} \text{ m}$
Fasti Plancks	$h$	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$



# 1 Örbylgjuofnar

Örbylgjuofninn er mikið tæknilegt afrek. Í þessu dæmi ætlum við að skoða aðeins eðlisfræðina á bakvið hann. Í örbylgjuofnum er svokölluð magnetróna og í henni eru rafeindir í einsleitu segulsviði sem ferðast í hringi vegna segulkrafta og gefa frá sér rafsegulbylgjur (örbylgjur) með tíðni  $f = 2450$  MHz en þessi tíðni er einmitt hermitíðni vatnssameinda. Örbylgjurnar sveifla síðan vatnssameindum í matnum þannig að núningur myndast milli sameindanna og maturinn hitnar.

**1)** (3 stig) Tilraun var gerð í 700 W örbylgjuofni þar sem nýtni var könnuð. 250 ml af vatni voru hitaðir um  $22^\circ\text{C}$  á einni mínútu í ofninum. Hver var nýtni hituninnar? Notið að varmarýmd vatns á rúmmál er 4216 J/LK.

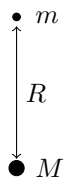
**2)** (5 stig) Hversu margar ljóseindir gefur 700 W örbylgjuofn frá sér á einni mínútu?

**3)** (5 stig) Örbylgjuofninn er hannaður þannig að bylgjurnar endurkastast af vegg ofnsins og mynda standandi bylgju. Ein afleiðing þess er að á hnútpunktum bylgjunnar verða kaldir blettir þar sem maturinn hitnar ekki. Hversu langt er á milli þessara köldu bletta? (Góðir örbylgjuofnar snúa matnum til þess að koma í veg fyrir kalda bletti en við gerum ekki ráð fyrir því í þessu dæmi.)

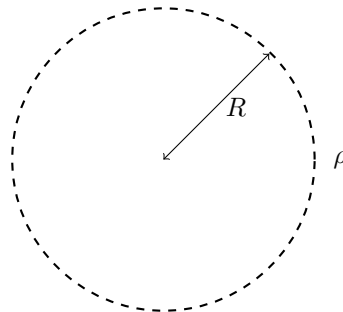
**4)** (7 stig) Hvert þarf segulsviðið að vera innan í magnetrónunni til þess að framkalla tíðnina  $f = 2450$  MHz? Gerið ráð fyrir að hringtíðni rafeindanna sé jöfn örbylgjutíðninni.

## 2 Sameindaský

Sameindaský eru geimský sem er nógu þétt til þess að sameindir myndist úr jónuðu gasi. Stjörnur myndast innan sameindaskýja þegar gasið fellur saman undan eigin þyngdarafli. Í þessu dæmi skoðum við mjög einfalt líkan af þessu ferli.



(a) Létt ögn með massa  $m$  fellur að punktmassa  $M$  vegna þyngdarkrafts.



(b) Kúlusamhverft ský með meðal-massapétteleika  $\rho$  fellur saman undir áhrifum þyngdarkrafts.

**1)** (5 stig) Hugsum okkur punktmassa  $M$  í miðju hnitakerfis og aðra miklu léttari ögn með massa  $m \ll M$  í fjarlægð  $R$  (sjá mynd 1a). Til að byrja með er ögnin kyrrstæð en fellur svo í átt að punktmassanum vegna þyngdarkrafts og rekst á hann eftir tíma  $\tau$ . Samkvæmt lögmálum Keplers þá hreyfast hlutir sem bundnir eru í þyngdarsviði eftir sporbaugum, og umferðartíminn  $T$  er háður hálfum langás sporbaugsins  $a$  samkvæmt

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}. \quad (1)$$

Lögmálið gildir einnig um hreyfingu eftir beinni línu ef við lítum á línustrikið sem sporbaug í markgildinu þegar lengd skammássins stefnir á 0. Við getum því notað jöfnu 1 til þess að finna  $\tau$  með því að velja rétt gildi fyrir  $a$  og  $T$ . Finndu  $\tau$  og notaðu stærðirnar  $M$ ,  $R$  og  $G$  í lokasvarinu.

**2)** (5 stig) Lítum næst á geimský sem er kúlusamhverft um miðpunkt hnitakerfisins (sjá mynd 1b). Upphaflega er skýið kyrrstætt með radius  $r_0$  og massapétteleika  $\rho$ , sem er óháður staðsetning og það fellur síðan saman vegna þyngdarkrafts. Gerum ráð fyrir að þrýstingurinn í gasinu sé hverfandi, svo að enginn annar kraftur verki á milli agnanna. Finndu  $\tau_{r \rightarrow 0}$ , tímann sem það tekur gasið að falla saman í kúlu með mun minni radius. Notaðu stærðirnar  $\rho$ ,  $r_0$  og/eða  $G$  í lokasvarinu.

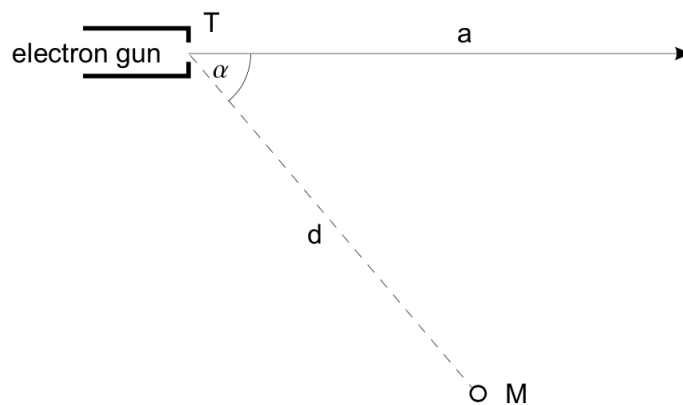
**3)** (3 stig) Afþræði geimskýja er mun flóknari en síðasti liður gerði ráð fyrir, og ekki er hægt að hunsa þrýstinginn í skýinu. Hugsum okkur að umhverfi skýsins (sem er mun þynnra gas) hafi fast hitastig  $T_0$ . Við gerum ráð fyrir að skýið sé svo gagnsætt að allur varmi sem myndast við þyngdarhrunið berist jafnóðum út úr skýinu í formi geislunar. Skýið er því í varmajafnvægi við umhverfið í þessari nálgun. Ef skýið hegðar sér eins og kjörgas, hvert er þá hlutfallið  $\frac{P_1}{P_0}$  milli þrýstingsins  $P_1$  þegar radius skýsins hefur helmingast ( $r_1 = 0.5r_0$ ) og upphaflegs þrýstings  $P_0$ ?

**4)** (7 stig) Ef meðalmólmassi skýsins er  $\mu$ , hversu mikill varmi hefur losnað úr skýinu þegar radius þess er  $r$  ( $r < r_0$ )? Notið stærðirnar  $r_0$ ,  $r$ ,  $T_0$ ,  $\mu$ , heildarmassa skýsins  $M$  og gasfastann  $R$  í lokasvarinu.

*Ábending:* Vinnan  $dW$  sem þyngdaraflið vinnur á skýinu þegar rúmmál þess minnkar um  $dV$  er  $dW = -p dV$  þar sem  $p$  er þrýstingurinn í skýinu.

### 3 Rafeindabyssa

Rafeindabyssa staðsett í punkti  $T$  hraðar rafeindum yfir spennunum  $U = 1000 \text{ V}$  og sendir þær í stefnu eftir línunni  $a$ . Skotmarkið  $M$  er staðsett í fjarlægð  $d = 5 \text{ cm}$  frá rafeindabyssunni þannig að hornið milli striksins sem tengir saman punkta  $T$  og  $M$  og línunnar  $a$  hefur stærð  $\alpha = 60^\circ$ .



**1)** (8) Finnið einsleitt segulsvið  $B$ , hornrétt á flötinn sem skilgreindur er út frá línunni  $a$  og punkti  $M$ , þannig að rafeindirnar hitti skotmarkið  $M$ .

**2)** (12) Finnið einsleitt segulsvið  $B$ , samsíða strikinu milli  $T$  og  $M$ , þannig að rafeindirnar hitti skotmarkið  $M$ .

## 4 Hraðasamlagning

Athugið að í þessu dæmi reynir ekki á fyrri þekkingu á takmörkuðu afstæðiskenningunni.

Í þessu dæmi leiðum við út hraðasamlagningarformúluna í takmörkuðu afstæðiskenningunni með einfaldri hugartilraun. Hugsum okkur lest sem fer framhjá brautarpalli. Frá sjónarhóli brautarpallsins hefur hún hraða  $v$  og lengd  $L$ . Við tímann  $t = 0$  leggur hlutur af stað frá afturenda lestarinnar með hraða  $w > v$  séð frá brautarpallinum í hreyfingarstefnu lestarinnar og á sama tíma leggur ljósblossi með hraða  $c$  af stað í sömu stefnu. Ljósblossinn endurkastast frá spegli fremst í lestinni og mætir hlutnum í fjarlægð  $fL$  frá framendanum,  $0 \leq f \leq 1$ . Notið afstæðislögmálið og lögmálið um fastan útbreiðsluhraða ljóss til að sýna að

$$f = \frac{(c+v)(c-w)}{(c-v)(c+w)} \quad (2)$$

Sýnið enn fremur að

$$f = \frac{c-u}{c+u} \quad (3)$$

þar sem  $u$  er hraði hlutarins í viðmiðunarkerfinu þar sem lestin er kyrrstæð. Notið nú (2) og (3) til að fá

$$w = \frac{u+v}{1+uv/c^2} \quad (4)$$

## 5 Jarðskjálftabylgjur

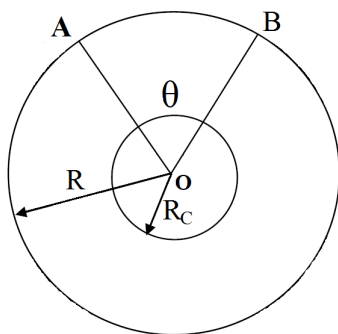
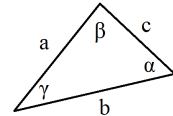
Í þessu dæmi verður skoðað mjög gróft líkan af útbreiðslu jarðskjálftabylgna. Dæmið krefst enngar þekkingar á jarðeðlisfræði en hins vegar er gott að hafa í huga að jöfnur um endurkast og bylgjubrot eru eins hér og í ljósfræði. Við gerum ráð fyrir að jörðin samanstandi af einsleitum kúlulaga fljóttandi kjarna með radíus  $R_c$  og einsleitum möttli úr föstu efni umhverfis kjarnann. Jörðin hefur fastan radíus  $R$ . Við skoðum tvenns konar rúmbylgjur, P-bylgjur og S-bylgjur. P-bylgjur eru langsbylgjur með útbreiðsluhraða  $v_P$  í möttli og hraða  $v_{PC} < v_P$  í kjarnanum. S-bylgjur eru þverbylgjur með útbreiðsluhraða  $v_S$  í möttli en þær geta ekki ferðast um kjarnann. Við gerum ráð fyrir að jarðskjálftar verði því sem næst við yfirborð jarðar.

Mundu eftir sínus-reglunni

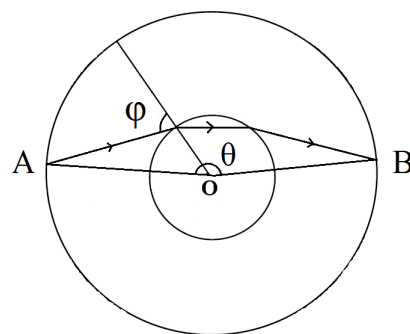
$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

og kósínus-reglunni

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$



Mynd 1



Mynd 2

Fastar:  $R = 6371 \text{ km}$ ,  $R_c = 3490 \text{ km}$ ,  $v_P = 11 \text{ km/s}$ ,  $v_S = 6,0 \text{ km/s}$ ,  $v_{PC} = 9,0 \text{ km/s}$

**1)** (4 stig) Á mynd 1 verður jarðskjálfti í punkti A. Bylgjur frá skjálftanum berast eftir beinni línu í gegnum möttulinn í punkt B. Þar er tæki sem nemur bylgjurnar. Hornið AOB, þar sem O er miðja jarðar, köllum við  $\theta$ . Ef S-bylgjurnar berast 6 mínútum og 14 sekúndum seinna en P-bylgjurnar í punktinn B, hvert er þá hornið  $\theta$ ?

**2)** (4 stig) Stuttu seinna mælast P- og S-bylgjur í B sem hafa speglast af kjarna jarðar. Hversu langur tími líður frá því að spegluðu P-bylgjurnar berast þangað til að spegluðu S-bylgjurnar berast? (Ef þú reiknaðir ekki  $\theta$  í lið (1), máttu gera ráð fyrir að  $\theta = 60^\circ$ .)

**3)** (2 stig) Hvert er stærsta horn  $\theta$  þannig að S-bylgjur geti borist frá A til B? (S-bylgjur geta ekki ferðast í kjarnanum.)

**4)** (10 stig) Jafnvel þótt  $\theta$ , þ.e. hornið milli A og B, sé stærra en hornið sem var reiknað í (3) geta P-bylgjur borist frá upptökum jarðskjálfta að nema. Það gerist þegar bylgjurnar brotna tvisvar á skilunum milli möttuls og kjarna líkt og á mynd 2. Leiðið út jöfnu fyrir  $\theta$  sem fall af  $\varphi$ , innfallshorninu við skil möttuls og kjarna.